



TITLE:

# 二成分混合流体における進行波対流 (非線形波動現象のメカニズムと数理)

AUTHOR(S):

八幡, 英雄

---

CITATION:

八幡, 英雄. 二成分混合流体における進行波対流 (非線形波動現象のメカニズムと数理). 数理解析研究所講究録 2001, 1209: 155-160

ISSUE DATE:

2001-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41090>

RIGHT:

## 二成分混合流体における進行波対流

広島大理 八幡英雄 (Hideo YAHATA)

Department of Physical Sciences,

Hiroshima University

二枚の水平平行平板間に二成分混合流体を容れ、底面より加熱したとき発生する Rayleigh-Bénard(RB) 対流を考える。この系は、平行平板間の温度差  $\Delta T$ 、流体の性質を表す Prandtl 数  $Pr$ 、溶液の種類、容器の形状・アスペクト比によって、きわめて多様な空間的構造と時間的挙動を示す。流体の熱流束  $\mathbf{q}$ 、成分 1 の質量流束  $\mathbf{j}_1$  は、温度場、成分 1 の重量分率をそれぞれ  $T$ 、 $x_1$  とすると、

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T - D_{01} \rho_0 \nabla x_1 \quad (1)$$

$$\mathbf{j}_1 = -D_{10} \nabla T - D \rho_0 \nabla x_1 \quad (2)$$

と書かれる。ここで、 $\rho_0$ 、 $\lambda$ 、 $D$  はそれぞれ溶液の平均密度、熱伝導率、拡散係数を表す。一方、係数  $D_{01}$ 、 $D_{10}$  に比例する項は、それぞれ Dufour 効果、Soret 効果による寄与を与える。流体の速度を  $\mathbf{u}$ 、圧力を  $P$  とすると運動方程式は、 $z$  軸の正の向きを重力と反対向きにとると、Boussinesq 近似の範囲で、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{P}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{e}_z. \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \gamma_1 \nabla^2 x_1. \quad (4)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla x_1 = \gamma_2 \nabla^2 T + D \nabla^2 x_1. \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

の形をとる。ここで、 $\nu$ は動粘性率、 $g$ は重力加速度、さらに、 $C_p$ を定圧比熱として、 $\kappa = \lambda/\rho_0 C_p$ は温度伝導率、 $\gamma_1 = D_{01}/C_p$ 、 $\gamma_2 = D_{10}/\rho_0$ を表す。状態方程式は、温度、溶質濃度による溶液の膨張係数をそれぞれ $\alpha$ 、 $\beta$ として $\rho(T, x_1) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(x_1 - x_{10}))$ で与えられる。液体では Dufour 効果による項の寄与は小さいので、以下係数 $\gamma_1$ に比例する項は落とす。

流体は厚さ $d$ 離れた二枚の平行な水平平板間に閉じ込められている場合を考え、平板上で流速は固定的 (rigid)、温度場は等温的、濃度場は非透過的 ( $j_{1z} = 0$ ) 境界条件を満たしているとする。底面、蓋面の位置を $z = -d/2, d/2$ とし、各面の一様温度を $T = T_0, T_1$ とする。対流がない定常状態の場合 ( $\mathbf{u} = 0, \partial_t = 0$ ) を決める方程式は、

$$0 = -\nabla \frac{P}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{e}_z \quad (7)$$

$$0 = \kappa \nabla^2 T \quad (8)$$

$$0 = -D_{10} \frac{\partial T}{\partial z} - D \rho_0 \frac{\partial x_1}{\partial z} = -D \rho \frac{\partial}{\partial z} (x_1 + \frac{\gamma_2}{D} T) \quad (9)$$

となる。式(9)により、場 $\eta = x_1 + \frac{\gamma_2}{D} T$ は上下平板で Neumann 境界条件を満たすので、以下 $x_1$ の代わりに $\eta$ によって濃度場変数を表す。したがって、以下取り扱う方程式系は、(3) - (6)の代わりに、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{P}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{e}_z. \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T. \quad (11)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta = \frac{\gamma_2 \kappa}{D} \nabla^2 T + D \nabla^2 \eta. \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (13)$$

となる。式(7) - (9)を解くと、

$$T^s(z) = T_0 - \frac{\Delta T}{d} z, \quad \eta^s(z) = x_1^s(z) + \frac{\gamma_2}{D} T^s(z) = \eta_0, \quad \rho^s(z) = \rho_0(1 - \bar{\alpha}(T^s(z) - T_0)) \quad (14)$$

となり、圧力  $P^s(z)$  は  $\rho^s(z)$  の表式を用いて式 (7) により定まる。ここで、 $T_0 = (T_0 + T_1)/2$ ,  $\Delta T = T_0 - T_1$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha(1 + S)$  で、 $S = \beta\gamma_2/\alpha D$  は分離比とよばれる。

つぎに、この convection-free state (14) に対する乱れの方程式を導くために、 $P = P^s + \delta p$ ,  $T = T^s + \delta T$ ,  $\eta = \eta^s + \delta \eta$  を、式 (10) – (13) に代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{\delta p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + (\bar{\alpha} \delta T - \beta \delta \eta) g \mathbf{e}_z. \quad (15)$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T = \kappa \nabla^2 \delta T. \quad (16)$$

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \eta = \frac{\gamma_2 \kappa}{D} \nabla^2 \delta T + D \nabla^2 \delta \eta. \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (18)$$

を得る。この方程式を無次元化するために、変換  $t \rightarrow (d^2/\nu)t$ ,  $\mathbf{u} \rightarrow (\nu/d)\mathbf{u}$ ,  $\delta T \rightarrow (\Delta T)\delta T$ ,  $\delta \eta \rightarrow (\Delta T)(\gamma_2/D)\delta \eta$  を行くと、無次元化された運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{\delta p}{\rho_0} + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Ra}{Pr} ((1 + S)\delta T - S\delta \eta) \mathbf{e}_z. \quad (19)$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \delta T. \quad (20)$$

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \eta = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \delta T + \frac{L}{Pr} \nabla^2 \delta \eta. \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (22)$$

を得る。ここで、方程式系は 4 個の無次元パラメータ: Rayleigh 数  $Ra = \alpha g d^3 \Delta T / \kappa \nu$ , Prandtl 数  $Pr = \nu / \kappa$ , Lewis 数  $L = D / \kappa$ , 分離比  $S$  によって特徴づけられている。境界条件は、上下水平境界面 ( $z = \pm 1/2$ ) で、 $\mathbf{u} = \partial_z \mathbf{u} = \delta T = \partial_z \delta \eta = 0$  で与えられる。

この系の Rayleigh-Bénard 対流は、パラメータの設定によって多様な空間的構造・時間的挙動を示すが、ここでは、分離比  $S$  が負の値をもつ場合に現れる、2 次元ロール状の対流胞がロールの軸に垂直方向に時間とともに平行移動する進行波対流 (Traveling-Wave or TW

convection) 状態について考察する。代表的な系として例えば、8 wt-% ethanol in water は、 $27.53^{\circ}\text{C}$  で  $Pr = 9.16$ ,  $L = -0.008$ ,  $S = -0.257$  をとるので<sup>1)</sup>、以下  $Pr = 10$ ,  $L = 0.01$ ,  $S = -0.25$  の系を扱うことにする。この系において、十分大きな  $Ra$  の値で 2 次元ロール対流は TW 状態ではなく、ロールの位置の時間的移動はない定常状態 (Stationary Overturning Convection or SOC state) にあるが、 $Ra$  の値を降下させると、或る  $r = Ra/(Ra)_c = r^*$  (ここで、 $(Ra)_c = 1708$ ) で、SOC から TW 状態への遷移が起る。 $Ra$  を降下させていくにつれ、ロールの移動速度  $V_p = \omega/k$  (ここで、 $\omega$  は角振動数、 $k$  はロールの波数) は次第に増加し、或る  $r = r_{TW}^*$  で saddle-node 分岐によって対流状態は不安定になり熱伝導状態に遷移する。このように、熱伝導状態と対流状態の間の遷移が subcritical であるのが、この系の特徴の一つである。

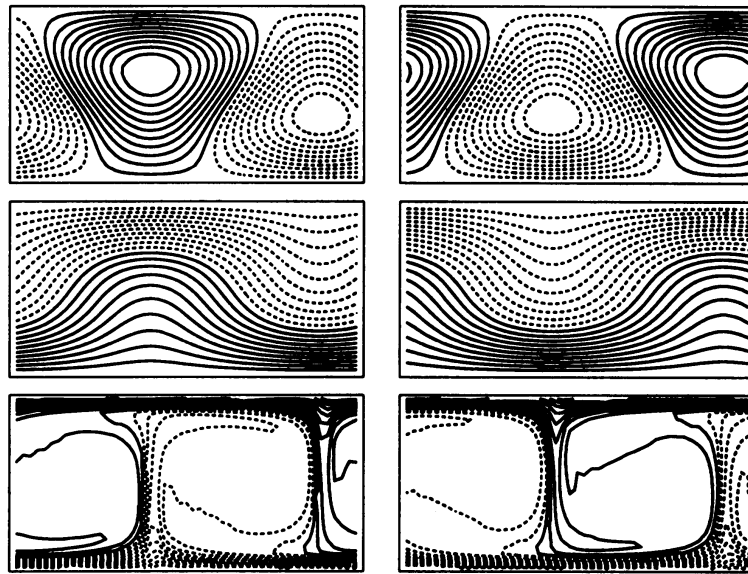


図 1: TW 状態における流体場の空間構造 ( $r = 1.3$ ,  $Pr = 10$ ,  $L = 0.01$ ,  $S = -0.25$ )。第 1 行は、速度成分  $u_z$ 、第 2 行は、温度場  $T$ 、第 3 行は濃度場  $x_1$  の等高線図。第 1 列と第 2 列は異なる時刻におけるそれぞれの場の等高線を示し、ロールが水平方向に移動していることを示す。

この系の遷移をしらべるために、MAC 法による simulation を行った。2 次元ロールの軸

方向には一様と仮定して、系は2次元的で  $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$  とし、境界条件は上下壁では上記条件を課し、水平方向には周期的境界条件を課した。高さ1、水平幅2の simulation box を、それぞれ24、48個の等方格子に分け、時間刻み幅は  $\tau = 0.25 \times 10^{-3} [d^2/\nu]$  にとった。2-ロール状態を初期状態として  $r = 2$  の SOC 状態を simulation によって実現させ、ここから出発して  $Ra$  をステップ状に降下させて、そこでの  $Ra$  の各値における流体方程式の時間発展を追った。図1は  $r = 1.3$  における TW 状態を示す。

次に、TW 状態における対流ロールの移動速度を Rayleigh 数にたいしてプロットした図を図2に示す。 $Ra$  の降下にとまって、移動速度は急激に増加することがわかる。SOC から TW 状態への遷移は、この計算によると  $r^* \simeq 1.36$  である。一方、純粋流体の対流状態からパラメータ  $S$  による摂動計算による結果は、 $r^* = 1.226^{2)}$ 、 $40 \times 20$  格子による MAC 法による simulation 結果は、 $r^* = 1.650^{3)}$ 、8 wt-% ethanol in water at  $28^\circ\text{C}$  における実験結果は、 $r^* = 1.826^{1)}$  を与える。これらは少しずつ異なった条件下で得られた結果であるが、これらの差が単にそれだけに起因するのかは否かは明らかでない。他方、角振動数  $\omega$ 、位相速度  $V_p$  は大略同程度の値を与える。

この研究のもともとの目的は、 $r = r^*$  における対流の安定性解析を行うことであったが、現在まだ計算中なのでその結果の報告は別の機会にゆずりたい。

### 参考文献

- 1) D. R. Ohlsen, S. Y. Yamamoto, and C. M. Surko, Phys. Rev. Lett. **65**(1990), 1431.
- 2) D. Bensimon, A. Pumir and B. I. Shraiman, J. de Physique **50**(1989), 3089.
- 3) W. Barten, M. Lücke, M. Kamps, and R. Schmitz, Phys. Rev. **E51**(1995), 5636.

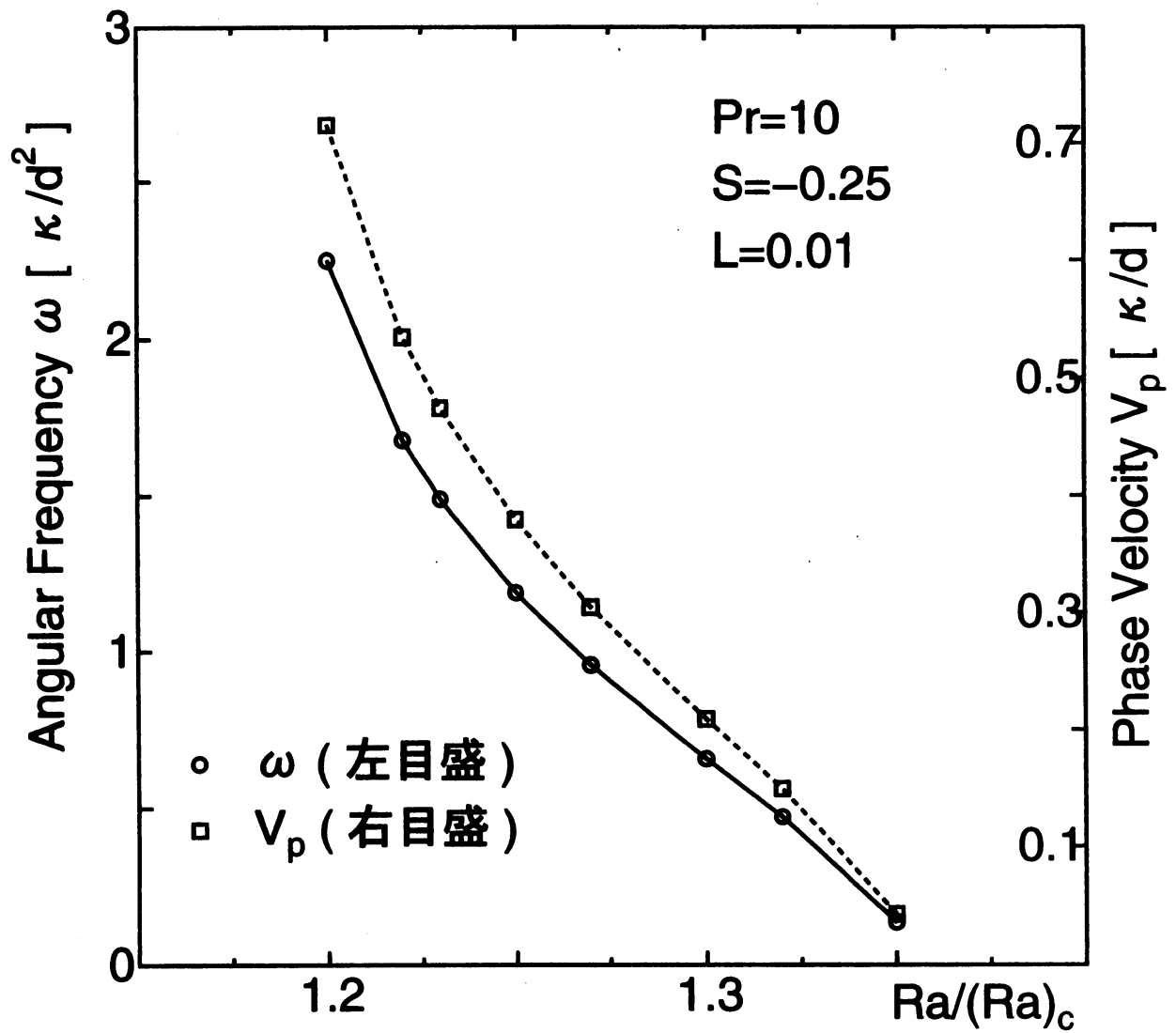


図 2: TW 状態における対流細胞の移動速度を特徴づける角振動数  $\omega$ 、位相速度  $V_p = \omega/k$  Rayleigh 数依存性。ここで、周期的ロールの波数は  $k = \pi$  である。